

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	11
Введение	13
1. «Элементарная» и «высшая» математика (13). 2. Величина. Переменная величина и функциональная зависимость (14). 3. Математика и действительность (16).	
ГЛАВА I	
ФУНКЦИЯ	
§ 1. Действительные числа	18
4. Действительные числа и числовая ось. Интервал (18). 5. Абсолютная величина (21). 6. О приближенных вычислениях (22).	
§ 2. Первоначальные сведения о функции	25
7. Определение функции (25). 8. Способы задания функций (27). 9. Символика (30). 10. Основные элементарные функции. Сложная функция (32). 11. Элементарные функции (33). 12. Неявные функции. Многозначные функции (36).	
§ 3. Начало изучения функций. Простейшие функции	38
13. Основные характеристики поведения функции (38). 14. Графическое изучение функции (41). 15. Прямая пропорциональная зависимость и линейная функция. Приращение величины (43). 16. Квадратичная функция (46). 17. Обратная пропорциональная зависимость и дробно-линейная функция (48).	
§ 4. Обратная функция. Степенная, показательная и логарифмическая функции	50
18. Обратная функция (50). 19. Степенная функция (54). 20. Показательная и логарифмическая функции (57).	
§ 5. Тригонометрические, обратные тригонометрические, гиперболические и обратные гиперболические функции	60
21. Тригонометрические функции. Гармонические колебания (60). 22. Обратные тригонометрические функции (64). 23. Гиперболические и обратные гиперболические функции (68).	
Вопросы и предложения для самопроверки	71

ПРЕДЕЛ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

§ 1. Предел функции. Бесконечные величины	73
24. Предел функции непрерывного аргумента (73). 25. Бесконечно большой аргумент (76). 26. Последовательности и их пределы (79). 27. Бесконечно большие величины. Ограниченные функции (81). 28. Бесконечно малые величины (85). 29. Правила предельного перехода (86). 30. Один признак существования предела функции. Первый замечательный предел (93). 31. Один признак существования предела последовательности. Второй замечательный предел (95).	
§ 2. Непрерывные функции	98
32. Непрерывность функции (98). 33. Точки разрыва функции (100). 34. Действия над непрерывными функциями. Непрерывность элементарных функций (102). 35. Свойства непрерывных функций (106).	
§ 3. Сравнение бесконечно малых величин	108
36. Сравнение бесконечно малых величин. Эквивалентные бесконечно малые величины (108). 37. Примеры отношений бесконечно малых величин. Натуральные логарифмы (110).	
Вопросы и предложения для самопроверки	114

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Производная	116
38. Некоторые задачи физики (116). 39. Скорость изменения функции. Производная функция. Производная степенной функции (120). 40. Геометрический смысл производной (123).	
§ 2. Дифференцирование функций	125
41. Дифференцирование результатов арифметических действий (125). 42. Дифференцирование сложной и обратной функций (129). 43. Производные основных элементарных функций (133). 44. Дифференцирование элементарных функций. Примеры (138). 45. Дополнительные замечания о дифференцировании функций (139). 46. Параметрически заданные функции и их дифференцирование (141).	
§ 3. Геометрические задачи. Графическое дифференцирование	146
47. Касательная и нормаль к линии (146). 48. Графическое дифференцирование (150). 49. Геометрический смысл производной в системе полярных координат (152).	
§ 4. Дифференциал	154
50. Дифференциал и его геометрический смысл (154). 51. Свойства дифференциала (157). 52. Дифференцируемость функции (161).	

53. Применение дифференциала к приближенным вычислениям (163).	
§ 5. Производные и дифференциалы высших порядков	166
54. Производные высших порядков (166). 55. Дифференциалы высших порядков (170).	
Вопросы и предложения для самопроверки	172

ПРИМЕНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

§ 1. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши	174
56. Теоремы Ферма и Ролля (174). 57. Теорема Лагранжа (177). 58*. Теорема Коши (179).	
§ 2. Поведение функции в интервале	181
59. Признаки монотонности функции (181). 60. Экстремумы функции (183). 61. Схема исследования функций на экстремумы. Наибольшее и наименьшее значения функции (187). 62. Применение второй производной. Точки перегиба (195).	
§ 3. Правило Лопиталя. Схема исследования функций	202
63. Правило Лопиталя (202). 64. Асимптоты линий (208). 65. Общая схема исследования функций (213).	
§ 4. Кривизна	216
66. Дифференциал длины дуги (216). 67. Кривизна (217).	
§ 5. Пространственные линии. Векторная функция скалярного аргумента	221
68. Пространственные линии (221). 69. Винтовая линия (224). 70. Векторная функция скалярного аргумента (226). 71*. Приложения к механике (231).	
§ 6. Комплексные функции действительного переменного	233
72. Комплексные числа (233). 73. Определение и дифференцирование комплексных функций (236). 74. Показательная функция и формулы Эйлера (237).	
§ 7. Решение уравнений	240
75. Общие сведения об уравнениях (240). 76. Признак кратности корня (244). 77. Приближенное решение уравнений (245).	
Вопросы и предложения для самопроверки	251

ИНТЕГРАЛ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Неопределенный интеграл	253
78. Первообразная функция (253). 79. Неопределенный интеграл. Основная таблица интегралов (256). 80. Простейшие правила интегрирования. Примеры (259). 81. Интегрирование по частям	

и замена переменной (264). 82. Интегрирование рациональных функций (270). 83. Интегрирование простейших иррациональных функций (277). 84. Интегрирование тригонометрических функций (279). 85. Заключительные замечания. Использование таблиц интегралов (283).	
§ 2. Определенный интеграл	286
86. Некоторые задачи геометрии и физики (286). 87. Определенный интеграл. Теорема существования (292). 88. Простейшие свойства определенного интеграла (295). 89. Перестановка пределов и разбиение интервала интегрирования. Геометрический смысл интеграла (296). 90. Оценка интеграла. Теорема о среднем. Среднее значение функции (301). 91. Производная от интеграла по его верхнему пределу (306). 92. Формула Ньютона — Лейбница (308). 93*. Интегрирование комплексных функций действительного переменного (311).	
§ 3. Способы вычисления определенных интегралов	312
94. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле (312). 95. Приближенные методы интегрирования (317). 96. Графическое интегрирование (324).	
§ 4. Несобственные интегралы	326
97. Интегралы с бесконечными пределами (326). 98*. Признаки сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами (330). 99. Интегралы от разрывных функций (335).	
Вопросы и предложения для самопроверки	338

ГЛАВА VI

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Некоторые задачи геометрии и статистики	340
100. Площадь фигуры (340). 101. Объем тела (343). 102. Длина дуги (346). 103. Центр тяжести криволинейной трапеции (350).	
§ 2. Общая схема применения интеграла	353
104. Схема решения задач (353). 105*. Площадь поверхности вращения (357). 106. Давление жидкости на стенку сосуда (359).	
Вопросы и предложения для самопроверки	360

ГЛАВА VII

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Функции нескольких переменных	361
107. Функции двух и многих переменных (361). 108. Метод сечений. Предел и непрерывность (365).	
§ 2. Производные и дифференциалы. Дифференциальное исчисление	369
109. Частные производные и дифференциалы (369). 110. Полный дифференциал (374). 111*. Дифференцируемость функций (377).	

112. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных (380). 113. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям (382). 114. Производные и дифференциалы высших порядков (385). 115. Отыскание функции по ее полному дифференциалу (387). 116. Дифференцирование сложных функций. Правила для отыскания дифференциала функций (393). 117. Теорема существования неявной функции (398). 118. Дифференцирование неявных функций (401).	
§ 3. Геометрические приложения дифференциального исчисления	404
119. Поверхности (404). 120. Пространственные линии как пересечение двух поверхностей (407).	
§ 4. Экстремумы функций нескольких переменных	410
121. Необходимые условия экстремума (410). 122. Достаточные условия экстремума для функций двух переменных (412). 123. Задачи о наибольших и наименьших значениях (414). 124*. Условные экстремумы (416).	
§ 5. Скалярное поле	422
125. Скалярное поле. Поверхности уровня (422). 126. Производная по направлению (423). 127. Градиент (426).	
Вопросы и предложения для самопроверки	430

ГЛАВА VIII

ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Двойные интегралы	432
128. Объем цилиндрического тела. Двойной интеграл (432). 129. Свойства двойных интегралов (435). 130. Вычисление двойных интегралов (437). 131. Двойной интеграл в полярных координатах (446). 132. Приложения двойных интегралов к задачам механики (451).	
§ 2. Тройные интегралы	453
133. Масса неоднородного тела. Тройной интеграл (453). 134. Вычисление тройных интегралов (455). 135. Применение тройных интегралов (462).	
§ 3*. Интегралы, зависящие от параметра	464
136*. Интегралы с конечными пределами (464). 137. Несобственные интегралы, зависящие от параметра (469).	
Вопросы и предложения для самопроверки	471

ГЛАВА IX

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ.
ТЕОРИЯ ПОЛЯ

§ 1. Криволинейный интеграл	472
138. Задача о работе силового поля. Криволинейный интеграл (472). 139. Вычисление криволинейных интегралов. Интегралы по замкнутому контуру (475). 140. Формула Грина (481). 141. Условие	

независимости интеграла от линии интегрирования (493). 142. Интегрирование полных дифференциалов. Первообразная функция (487). 143. Криволинейные интегралы по пространственным линиям (490). 144. Приложения криволинейных интегралов к задачам механики и термодинамики (494). 145. Криволинейный интеграл по длине (первого рода) (499).

§ 2*. Интегралы по поверхности 502

146*. Поток жидкости через поверхность. Интеграл по поверхности (502). 147*. Свойства интегралов по поверхности (505). 148*. Вычисление интегралов по поверхности (508). 149*. Формула Стокса (514). 150*. Формула Остроградского (517).

§ 3*. Теория поля 519

151*. Векторное поле и векторные линии (519). 152*. Поток вектора. Дивергенция (522). 153*. Циркуляция и ротор векторного поля (528). 154*. Оператор Гамильтона и векторные дифференциальные операции второго порядка (533). 155*. Свойства простейших векторных полей (535). 156*. Электромагнитное поле (538). 157*. Нестационарные поля (543).

Вопросы и предложения для самопроверки 545

ГЛАВА X

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Дифференциальные уравнения первого порядка 547

158. Общие понятия. Теорема существования (547). 159. Уравнения с разделяющимися переменными (551). 160. Некоторые задачи физики (554). 161. Однородные и линейные уравнения первого порядка (558). 162. Уравнения в полных дифференциалах (564). 163. Приближенные методы решения уравнений первого порядка (565). 164*. Особые точки дифференциальных уравнений первого порядка (569).

§ 2. Дифференциальные уравнения второго и высших порядков 572

165. Дифференциальные уравнения второго порядка (572). 166. Частные случаи уравнений второго порядка (574). 167. Приложения к механике (576). 168. Дифференциальные уравнения высших порядков (581).

§ 3. Линейные дифференциальные уравнения 582

169. Линейные уравнения второго порядка. Общие свойства (582). 170. Уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами без правой части (586). 171. Уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью (591). 172. Метод вариации произвольных постоянных (598). 173. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка (600). 174. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами (604). 175. Колебания. Резонанс (605).

§ 4. Системы дифференциальных уравнений 613

176. Общие определения. Нормальные системы уравнений (613). 177*. Геометрическая и механическая иллюстрация решений систем дифференциальных уравнений. Фазовое пространство (617). 178. Системы линейных дифференциальных уравнений (620).

179. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (622). 180*. Случай кратных корней характеристического уравнения (627). 181*. Матричная форма записи системы линейных дифференциальных уравнений (630). Вопросы и предложения для самопроверки 634

ГЛАВА XI

РЯДЫ

§ 1. Числовые ряды 636

182. Определение ряда и его суммы (636). 183. Необходимый признак сходимости ряда. Гармонический ряд (640). 184. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости (642). 185. Интегральный признак Коши (647). 186. Ряды с произвольными членами. Абсолютная сходимость (649).

§ 2. Функциональные ряды 653

187. Общие определения (653). 188. Свойства правильно сходящихся функциональных рядов (656).

§ 3. Степенные ряды 658

189. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости (658). 190. Свойства степенных рядов (663).

§ 4. Разложение функций в степенные ряды 665

191. Ряд Тейлора (665). 192. Условие разложения функций в ряд Тейлора (668). 193. Остаточный член ряда Тейлора. Формула Тейлора (670). 194. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена (673).

§ 5. Некоторые применения рядов Тейлора 680

195. Приближенное вычисление значений функции (680). 196. Интегрирование функций и дифференциальных уравнений (684).

§ 6*. Дополнительные вопросы теории степенных рядов 689

197*. Степенные ряды в комплексной области (689). 198*. Ряд и формула Тейлора для функции двух переменных (692).

Вопросы и предложения для самопроверки 694

ГЛАВА XII

РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

§ 1. Ряды Фурье 695

199. Гармонические колебания. Тригонометрические ряды (696). 200. Ряды Фурье (700). 201. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций. Ряд Фурье в произвольном интервале (705). 202. Примеры (707).

§ 2. Дополнительные вопросы теории рядов Фурье. Практический гармонический анализ 714

203*. Равенство Парсеваля. Среднее значение квадрата периодической функции (714). 204*. Ряды Фурье в комплексной форме (715). 205*. Ортогональные системы функций (717). 206. Практический гармонический анализ. Шаблоны (719).

§3*. Интеграл Фурье 723

207*. Интеграл Фурье (723). 208*. Интеграл Фурье для четных и нечетных функций (726). 209*. Интеграл Фурье в комплексной форме. Преобразование Фурье (728).

Вопросы и предложения для самопроверки 730

Таблица интегралов 731

Литература 736